Chapitre 12 : Limites et continuité

Table des matières

1 Limite d'une fonction en un point

Notation : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

1.1 Définition et premières propriétés de la limite

Définition 1.1 (voisinage d'un point)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Un voisinage de a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme suivante :
- lorsque $a \in \mathbb{R}$, un intervalle de la forme $[a-\eta\,; a+\eta]$, avec $\eta > 0$;
- lorsque $a = +\infty$, un intervalle de la forme $[R\,; +\infty[$, avec $R \in \mathbb{R}$;
- lorsque $a = -\infty$, un intervalle de la forme $]-\infty\,; R]$, avec $R \in \mathbb{R}$.

Propriété vraie au voisinage d'un point : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit qu'une propriété portant sur les réels est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur au moins un voisinage de a, c'est-à-dire :
- lorsque $a \in \mathbb{R}$, si elle est vraie sur un intervalle de la forme $[a-\eta\,; a+\eta]$, avec $\eta > 0$;
- lorsque $a = +\infty$, si elle est vraie sur un intervalle de la forme $[R\,; +\infty[$, avec $R \in \mathbb{R}$;
- lorsque $a = -\infty$, si elle est vraie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,; R]$, avec $R \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2 (point adhérent à un intervalle)

Soit I un intervalle non trivial (c'est-à-dire un intervalle non vide et non réduit à un point).
Un point adhérent à I est un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ qui appartient à I ou qui est l'une des deux extrémités (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$) de I.

Remarque : Si a est un point adhérent à un intervalle I, alors l'intersection de I avec n'importe quel voisinage de a est non vide.

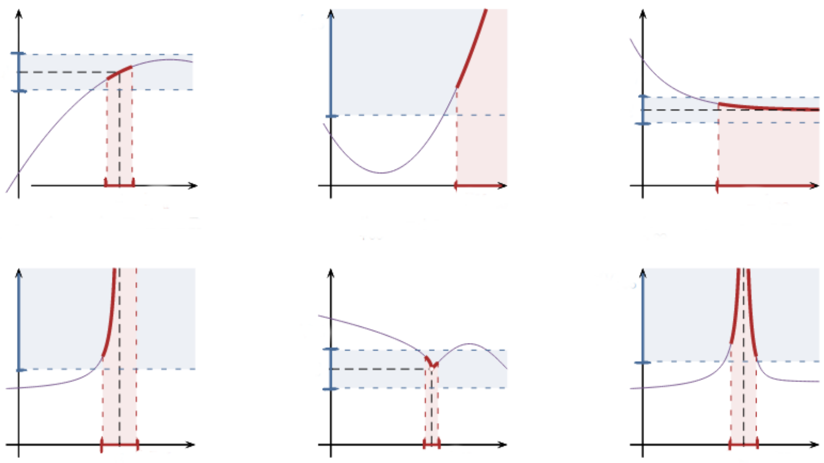
Définition 1.3 (limite finie ou infinie d'une fonction)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ au voisinage de a.
   Autrement dit :
   - si $a \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
   - si $a = +\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
   - si $a = -\infty$: $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
2. On dit que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant A$ au voisinage de a.
   Autrement dit :
   - si $a \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
   - si $a = +\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
   - si $a = -\infty$: $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
3. On dit que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant A$ au voisinage de a.
   Autrement dit :
   - si $a \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$
   - si $a = +\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$
   - si $a = -\infty$: $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$

Remarque : Pour $\ell \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow f(x)-\ell \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |f(x)-\ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 1.4 : Compléter les graphiques suivants en stipulant de quelle type de limite il s'agit.



Théorème 1.5 (caractérisation séquentielle de la limite)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I, et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}},\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \implies f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\right)$$

Remarque : Cette caractérisation permet de démontrer la plus part des résultats ci-dessous en utilisant les propriétés déjà démontrées pour les suites.

Proposition 1.6 (unicité de la limite)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I. S'il existe ℓ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Notation : On peut donc parler de <u>***la*** limite de f en a</u> (lorsque celle-ci existe), notée $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$.

Non existence d'une limite : Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers a et telles que les suites $\big(f(x_n)\big)$ et $\big(f(y_n)\big)$ n'ont pas la même limite.

Exemple 1.7 : Montrer que la fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

Proposition 1.8 (limite en un point où la fonction est définie)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in I$.
Si f possède une limite en a, alors celle-ci est finie et est égale à $f(a)$.

Proposition 1.9 (limite finie en $a \implies$ bornée au voisinage de a)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I.
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

1.2 Limites à droite et à gauche

Définition 1.10 (limite à droite, limite à gauche)

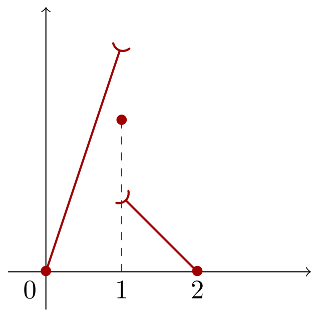
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle non trivial I, soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à I, et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. On suppose que f est définie à droite de a, c'est-à-dire que $I \cap]a\,;+\infty[\neq \emptyset$.
   On dit alors que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x>a}}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$ lorsque la restriction de f à $I \cap]a\,;+\infty[$ a pour limite ℓ en a. Autrement dit :
   - si $\ell \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
   - si $\ell = +\infty$: $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
   - si $\ell = -\infty$: $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$
2. On suppose que f est définie à gauche de a, c'est-à-dire que $I \cap]-\infty\,;a[\neq \emptyset$.
   On dit alors que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x<a}}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell$ lorsque la restriction de f à $I \cap]-\infty\,;a[$ a pour limite ℓ en a. Autrement dit :
   - si $\ell \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
   - si $\ell = +\infty$: $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
   - si $\ell = -\infty$: $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$

Notation : On a aussi unicité des limites à droite et à gauche (lorsqu'elles existent), notées $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{a^+} f$ pour la limite à droite, et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{a^-} f$ pour la limite à gauche.

Exemple 1.11 : Les limites à droite et à gauche en a peuvent être différentes de la valeur que la fonction prend en a. Ci-contre une représentation du graphe d'une fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ qui vérifie $f(1) = 2$ ainsi que :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$



Proposition 1.12 (caractérisation de la limite en un point intérieur)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, soit a un point intérieur de I (ce qui signifie qu'il existe un voisinage de a contenu dans I), et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell \\ f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}$$

Non existence d'une limite : En particulier, si la limite à gauche est différente de la limite à droite en a, alors f n'a pas de limite en a. De même si une des deux limites à droite ou à gauche est différente de $f(a)$.

1.3 Limite épointée

Définition 1.13 (limite épointée)

Soit I un intervalle non trivial, soit $a \in I$, soit f une fonction réelle définie sur $I \backslash \{a\}$, et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On définit la propriété « $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$ » (ce que l'on note plus simplement $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le fait que f n'est pas définie en a) de la manière suivante :

1. lorsque $\ell \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
2. lorsque $\ell = +\infty$: $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
3. lorsque $\ell = -\infty$: $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$

Notation : On a aussi unicité de la limite épointée (lorsqu'elle existe), notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

Proposition 1.14 (caractérisation de la limite épointée en un point intérieur)

Soit I un intervalle non trivial, soit a un point intérieur de I, soit f une fonction réelle définie sur $I \backslash \{a\}$ (f est donc définie à la fois à gauche et à droite de a), et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On a l'équivalence :

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell \\ f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell \end{cases}$$

Remarque : Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, soit $a \in I$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On a l'implication : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \implies f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$ (par restriction de f à $I \backslash \{a\}$).
2. On a l'équivalence : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}$

Exemple 1.15 : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \mathbf{e}^{\frac{1}{x^2}}$.
Déterminer les limites à droite et à gauche de f en 0 et montrer que f admet une limite épointée en 0.

1.4 Opérations sur les limites

Tous les résultats sur les opérations algébriques ($+$, $-$, $\times$, $\div$, combinaisons linéaires) de limites vus pour les suites s'adaptent au cas des fonctions (également pour les limites à droite, à gauche et épointées).

Théorème 1.16 (composition de limites de fonctions)

Soient f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur I et J, intervalles non triviaux, telles que $f(I) \subset J$ (de telle sorte que l'on puisse considérer la composée $g \circ f$).
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à J, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ a & & b & & \ell \end{array}$$

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 1.17 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis étudier ses fonctions au voisinage de 1 : $f : x \mapsto \dfrac{\tan\left(-\frac{\pi}{2}x\right)}{(\ln(x))^2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\tan\left(-\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(x)}$.

1.5 Propriétés liées à l'ordre

Théorème 1.18 (stabilité des inégalités larges par passage à la limite)

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I. On suppose que :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$;
2. f et g admettent des limites finies en a.

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Remarque : Comme pour les suites, les inégalités strictes ne sont pas nécessairement préservées par passage à la limite. Par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x} > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Théorème 1.19 (théorèmes d'existence de limites par comparaison)

Soient f, g et h trois fonctions réelles définies sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I.

1. *Théorème de convergence par encadrement (ou théorème des gendarmes) :*
   On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
   Si les fonctions f et h admettent la même limite finie ℓ en a, alors on a aussi $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. *Théorème de divergence par minoration :*
   On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.
   Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors on a aussi $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.
3. *Théorème de divergence par majoration :*
   On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.
   Si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors on a aussi $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque : Pour les deux théorèmes précédents, il suffit que les inégalités sur les fonctions soient vérifiées au voisinage de a. De plus, toutes ces propriétés sont également vraies pour les limites à gauche, à droite et épointées.

Théorème 1.20 (théorème de la limite monotone)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle non vide de la forme $]a\,;b[$, avec a et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si f est monotone, alors elle admet des limites (finies ou infinies) en a et en b. Plus précisément :

1. On suppose que f est croissante.
   (a) Si f est majorée alors f admet une limite finie en b. Sinon, $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$.
   (b) Si f est minorée alors f admet une limite finie en a. Sinon, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.
2. On suppose que f est décroissante.
   (a) Si f est majorée alors f admet une limite finie en a. Sinon, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.
   (b) Si f est minorée alors f admet une limite finie en b. Sinon, $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} -\infty$.

2 Continuité

2.1 Définition de la continuité et premières propriétés

Définition 2.1 (fonction continue)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial.
- Soit $a \in I$. On dit que f est <u>continue en a</u> lorsque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
- On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

Remarque : D'après la proposition 1.8 : f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a. En effet cette limite, lorsqu'elle existe, est nécessairement finie et égale à $f(a)$.

Continuité des fonctions usuelles :
Les fonctions suivantes sont continues sur leurs ensembles de définition :
- les fonctions polynomiales ;
- les fonctions exponentielles et logarithmes ;
- les fonctions puissances ;
- les fonctions circulaires (cos, sin, tan) et circulaires réciproques (Arccos, Arcsin et Arctan) ;
- les fonctions hyperboliques (ch et sh) ;
- la fonction valeur absolue.

La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (discontinuité en chaque entier $k \in \mathbb{Z}$).

Remarque : Pour une fonction f dont l'ensemble de définition D est une réunion d'intervalles (exemples : fonction inverse, fonction tangente), dire que f est continue sur D signifie que les restrictions de f à chacun des intervalles qui composent D sont continues.

Théorème 2.2 (caractérisation séquentielle de la continuité en un point)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in I$.

$$f \text{ continue en } a \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}},\, x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \implies f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a) \right)$$

2.2 Continuité à droite et à gauche

Définition 2.3 (fonction continue à droite et à gauche)

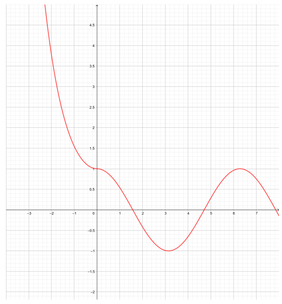
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in I$.
1. Lorsque f est définie à droite de a, on dit que f est <u>continue à droite en a</u> si $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} f(a)$.
2. Lorsque f est définie à gauche de a, on dit que f est <u>continue à gauche en a</u> si $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a)$.

Proposition 2.4 (caractérisation de la continuité par la continuité à gauche et à droite)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit a un point intérieur de I.
La fonction f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Exemple 2.5 : Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ où :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{ch}(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$



2.3 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 2.6 (stabilité par les opérations algébriques)

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in I$.
On suppose que f et g sont continues en a. Alors :

1. Pour tous λ et $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en a.
2. fg est continue en a.
3. Si g ne s'annule pas en a, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont bien définies au voisinage de a et elles sont continues en a.

Remarque : Ces propriétés sont aussi valables pour la continuité à droite ou à gauche.

Conséquences : Soit I un intervalle non trivial.

1. L'ensemble $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur I est stable par somme, produit et opposé.
2. L'ensemble $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ est aussi stable par combinaison linéaire.
3. Le quotient de deux fonctions continues sur I est, lorsqu'il est bien défini (c'est-à-dire lorsque le dénominateur ne s'annule pas sur I), une fonction continue sur I.

Proposition 2.7 (stabilité par composition)

Soient f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur I et J, intervalles non triviaux, telles que $f(I) \subset J$, et soit $a \in I$.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ a & & f(a) & & \end{array}$$

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Conséquence : La composée de deux fonctions continues est continue.

Exemple 2.8 : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$ est continue.

2.4 Prolongement par continuité

Rappel : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \notin D$.
Un prolongement de f sur $D \cup \{a\}$ est une fonction $\widetilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in D$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$.
Sans précision supplémentaire, $\widetilde{f}(a)$ peut être égal à n'importe quel réel.

Définition 2.9 (prolongement par continuité d'une fonction)

Soit I un intervalle non trivial, soit $a \in I$, et soit f une fonction réelle définie sur $I \backslash \{a\}$.
On appelle <u>prolongement par continuité de f en a</u> une fonction qui est un prolongement de f sur I et qui est continue en a.
Lorsqu'une telle fonction existe, on dit que f est <u>prolongeable par continuité en a</u>.

Remarque : Dans le cas où f est déjà continue sur $I \backslash \{a\}$, on parle aussi de « prolongement par continuité sur I », car la fonction ainsi prolongée est continue sur I.

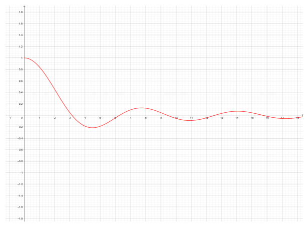
Proposition 2.10 (condition d'existence d'un prolongement par continuité)

Soit I un intervalle non trivial, soit $a \in I$, et soit f une fonction réelle définie sur $I \backslash \{a\}$.
La fonction f est prolongeable par continuité en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe et est finie.
Dans ce cas, il existe un unique prolongement par continuité de f en a, qui est la fonction

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

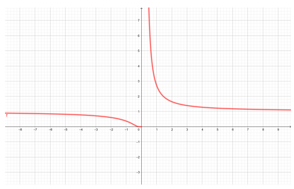
où $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

Exemple 2.11 : Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?



Cas particulier : Lorsque f est définie à gauche et à droite de a (mais pas en a), f est prolongeable par continuité en a si et seulement si les limites de f à droite et à gauche en a existent, sont finies et sont égales.

Exemple 2.12 : Soit $g : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Peut-on prolonger cette fonction par continuité en 0 ?



3 Continuité sur un intervalle : propriétés globales

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

Théorème 3.1 (théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle non trivial I, et soient a et b dans I tels que $a \leqslant b$.
On suppose que f est **continue**.
Alors pour tout réel y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a\,; b]$ tel que $f(c) = y_0$.

Application : *Recherche d'un zéro d'une fonction continue par dichotomie*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I qui change de signe (i.e. $\exists(a,b) \in I^2$, $a \leqslant b$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$).
On dit que $x \in I$ est <u>un zéro de f</u> lorsque $f(x) = 0$. L'algorithme suivant donne un encadrement de plus en plus fin d'un zéro de f.

1. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que f admet un zéro dans $[a,b]$.
2. On détermine le signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $f(a)$ sont de signes contraires (i.e. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(a) \leqslant 0$), on recommence au point 1. en considérant le segment $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$. Sinon, ceux sont $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $f(b)$ qui sont de signes contraires, on recommence alors au point 1. en considérant le segment $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$.

Méthode de la dichotomie sous Python :

```
def dichotomie(f,a,b,eps) :
    while b-a > eps :
        m = (a+b)/2
        if f(a)*f(m) <= 0 :
            b = m
        else :
            a = m
    return (a+b)/2
```

Corollaire 3.2 (théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle non trivial I, et soient a et b dans I tels que $a \leqslant b$.
On suppose que f est **continue** et **strictement monotone**.
Alors pour tout réel y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = y_0$.

Corollaire 3.3 (image d'un intervalle par une fonction continue)

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I non trivial.
Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.4 : Déterminer explicitement $\cos(\mathbb{R})$, $\text{ch}(\mathbb{R})$ et $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

3.2 Continuité et bijectivité

Théorème 3.5 (théorème de la bijection)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial.
On suppose que f est **continue** et **strictement monotone**.
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle image $f(I)$.
De plus, la bijection réciproque est continue et de même monotonie que f.

3.3 Continuité sur un segment

Rappel : On appelle segment tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $[a\,;b]$ avec a,b réels tels que $a < b$.

Théorème 3.6 (une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soit f une fonction réelle définie sur le segment $[a\,;b]$.
On suppose que f est continue.
Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'elle admet un minimum et un maximum. Autrement dit, $\exists(\alpha\,,\beta) \in [a\,;b]^2$, $\forall x \in [a\,;b]$, $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$.

Exemple 3.7 : La fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\cos([0{,}2\pi]) = [-1{,}1] = [\cos(\pi), \cos(0)]$.

Corollaire 3.8 (image d'un segment par une fonction continue)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soit f une fonction réelle définie sur le segment $[a\,;b]$.
On suppose que f est continue.
Alors $f([a\,;b])$ est un segment ou un singleton. Plus précisément, $f([a\,;b]) = \left[\min\limits_{x\in[a\,;b]} f(x)\,;\ \max\limits_{x\in[a\,;b]} f(x)\right]$.

4 Extension des notions aux fonctions complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, avec I un intervalle non trivial. On peut définir de la même manière que pour les fonctions réelles :

1. la notion de limite **finie** en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ point adhérent à I (la limite sera un nombre complexe).
   Dans ce cadre, $|f(x) - \ell|$ est un **module** (au lieu d'une valeur absolue), et $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ s'interprète géométriquement par « $f(x)$ est dans le disque fermé de centre ℓ et de rayon ε ».
2. les notions de limites (finies) à gauche, à droite, épointées
3. les notions de continuité, de continuité à droite et à gauche, de prolongement par continuité

De même que dans le cas des fonctions réelles, on a **unicité de la limite**, sous réserve d'existence.

Théorème 4.1 (caractérisation de la limite à l'aide des parties réelles et imaginaires)

Soit f une fonction complexe définie sur un intervalle I non trivial, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I, et soit $\ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \mathfrak{Re}(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

Corollaire 4.2 (caractérisation de la continuité à l'aide des parties réelles et imaginaires)

Soit f une fonction complexe définie sur un intervalle I non trivial.

1. Pour tout $a \in I$, f est continue en a si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues en a.
2. f est continue sur I si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues sur I.

Remarque : On a des caractérisations similaires pour :

- les limites à gauche, à droite, épointées ;
- la continuité à gauche et à droite ;
- les fonctions prolongeables par continuité.

Les propriétés suivantes restent vraies pour les fonctions complexes :

1. caractérisation séquentielle de la limite et de la continuité ;
2. opérations algébriques sur les limites, et par conséquent propriétés de stabilité des fonctions continues par ces opérations ;
3. composition de limites pour $g \circ f$ avec $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ (avec I et J des intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$), et par conséquent $g \circ f$ est continue si les fonctions f et g sont continues.

Théorème 4.3 (continuité d'une fonction définie avec l'exponentielle complexe)

Soit f une fonction complexe définie sur un intervalle I non trivial.
Si f est continue, alors la fonction composée $\exp \circ f : I \to \mathbb{C}$ est continue.

Mise en garde : toutes les propriétés liées à l'ordre sur $\mathbb{R}$ n'ont pas lieu d'être pour les fonctions complexes.